# 重み付き乗法的相互作用をする多自由度確率過程における確率分布関数(経済物理学II-社会・経済への物理学的アプローチ-,京都大学基礎物理学研究所2005年度後期研究会)



藤原, 明広; 谷本, 智史; 山本, 洋; 大月, 俊也

# 重み付き乗法的相互作用をする多自由度確率過程における確率分布関数

横浜市立大学 総合理学研究科　藤原 明広[1], 谷本 智史
横浜市立大学 国際総合化学科　山本 洋, 大月 俊也

## 1　序（概要）

自然界の様々な分野においてベキ分布や対数正規分布といったゆらぎの大きい分布が幅広く存在することが知られている [1]。経済現象においても富の分布がベキ分布になることが報告されている [2]。このベキ分布を理論的に説明するモデルの一つとして乗法的相互作用をする多自由度確率過程 [3] がある。この確率過程は $N$ 粒子系において次のように定義される。まず粒子は正の値 $x_i\ (>0)\ (i=1,\cdots,N)$ を持つとする。一ステップ毎に $N$ 粒子の中から二粒子をランダムに選択して相互作用させ、それらの値 $x_i, x_j\ (i \neq j)$ をそれぞれ $x'_i = \alpha x_i + \beta x_j, x'_j = \beta x_i + \alpha x_j$ に変換する（但し、$\alpha, \beta\ (>0)$ は相互作用パラメータ)。このような操作を十分繰り返すと、粒子の持つ値の確率分布関数の裾野にベキ分布 $\Psi(\xi) \sim 1/\xi^{1+s}$ が現れることが分かっている。またこの分布のベキ指数 $s$ は解析的に導出することができる。このモデルのベキ指数は臨界現象で見られるそれのような普遍性を持たず、相互作用パラメータ $\alpha, \beta$ に依存する連続関数になっている。またベキ指数が $\alpha, \beta$ の両方に依存することから、このモデルは一自由度のランダム乗算過程に還元できない、多自由度特有の性質を持つ。上の確率過程はランダムに二粒子を選択していたが、一般に粒子の持つ値に依存した選択も考えることができる。例えば、経済系において相互作用する人達の間にある種の階層性があることが期待され、富者と貧者よりも、富者と富者の富の交換の方が起こりやすい状況があるだろう。またある状況では富者は全く相手にされず、貧者同士で相互作用することにより富を蓄えていくこともあるだろう。従って、我々は粒子選択の頻度に重みを付けた重み付き乗法的相互作用をする多自由度確率過程 [4] を考えることにした。ここで、重みは具体的に $K(x,y) \propto x^w y^w$ の場合を解析した（但し、$w$ は重みパラメータ)。重みがより一般的な形をしている場合でも次節で紹介する方法を用いて同様に解析することができる。我々はこのモデルを調べ、$w<0$ のときに確率分布関数 $\Psi(\xi)$ の裾野に対数正規分布が現れることを解析的に示した。また $w>0$ のときには二人勝ち分布になることをシミュレーションで確認した。以上より、このモデルにおいてベキ分布の裾野は $w=0$ の境界でのみ現れることが明らかになり、複雑系でしば

[1]E-mail: fujihara@yokohama-cu.ac.jp

しば現れるカオスの縁の構造を持つことが分かった。富のベキ分布の自己組織化臨界現象的な説明の一例を提案する。

## 2 重み付き乗法的相互作用をする多自由度確率過程

粒子の値の確率分布関数 $f(z,t)$ の時間発展は次のマスター方程式によって記述される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\ f(x,t)\ f(y,t)\ K(x,y) \\ &\quad \times \frac{1}{2}\left[\,\delta(z-(\alpha x+\beta y))+\delta(z-(\beta x+\alpha y))-\delta(z-x)-\delta(z-y)\,\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $K(x,y)=x^w\ y^w/(m_w)^2$ で、$w$ は重みパラメータ、$m_w(t)=\int_0^\infty x^w f(x,t)dx$ である。以降では、$\alpha>1$ または $\beta>1$ の系内の粒子の値の総和が増大して、系全体が成長するパラメータ領域のときを考える。まず $w<0$ の場合を考える。系が成長する為、以下のようなスケーリングを行う。

$$\xi = z\ \exp(-\gamma t), \qquad \Psi(\xi)=f(z,t)\ \exp(\gamma t). \tag{2}$$

但し、$\gamma\equiv(\alpha+\beta-1)\mu_{1+w}/\mu_1\mu_w$ は系の成長率を表す。スケールした確率分布関数 $\Psi(\xi)$ の定常解を調べる。式 (1) に式 (2) を代入して計算した結果を整理すると、次式のようなモーメント不等式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\mu_w)^2}\sum_{k=1}^{k_p-1}\begin{pmatrix} p \\ k\end{pmatrix}(\alpha^k\beta^{p-k}+\beta^k\alpha^{p-k})\mu_{k+w}\mu_{p-k+w} \ &\le\ p\gamma\mu_p-(\alpha^p+\beta^p-1)\frac{\mu_{p+w}}{\mu_w} \\ &\le\ \frac{1}{(\mu_w)^2}\sum_{k=1}^{k_p}\begin{pmatrix} p \\ k\end{pmatrix}(\alpha^k\beta^{p-k}+\beta^k\alpha^{p-k})\mu_{k+w}\mu_{p-k+w}. \end{aligned} \tag{3}$$

この式から $p\to\infty$ で漸近的に成り立つモーメント式は自己無撞着に次のように決定される。

$$\mu_p=\exp(ap^2), \qquad a=\frac{\ln\alpha}{2|w|}. \tag{4}$$

この結果は数値計算やシミュレーション結果とも一致した。この漸近モーメント式 (4) をメラン変換することにより、確率分布関数 $\Psi(\xi)$ は次のように決定される。

$$\Psi(\xi)\ =\ \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty}\mu_{s-1}\xi^{-s}ds\ \simeq\ \frac{1}{\sqrt{4a\pi}\xi}\exp\left(-\frac{(\ln\xi)^2}{4a}\right), \qquad (\xi\gg 1). \tag{5}$$

従って、$w<0$ のとき確率分布関数の裾野は分散 $a$ の対数正規分布になることが分かった。また、現実的な系においては一般に相互作用が弱く、系の成長率が小さい（$0<\beta\ll\gamma\ll 1$）事が多い。このとき、対数正規分布の分散と系の成長率の間に比例関係が成立する。

$$a\ \simeq\ \frac{1}{2|w|}\frac{\mu_1\mu_w}{\mu_{1+w}}\gamma\ \propto\ \gamma. \tag{6}$$

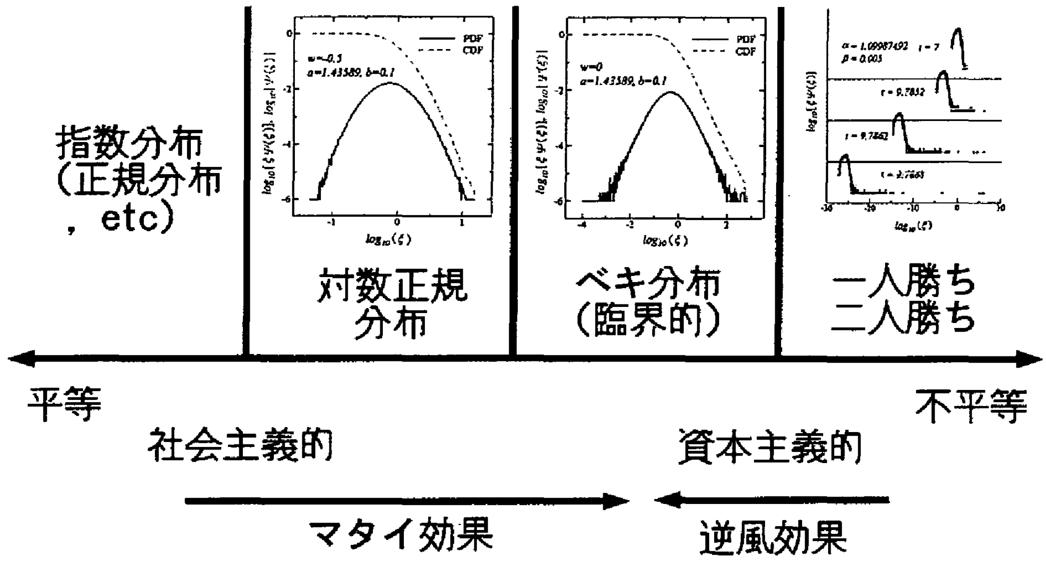


図 1: 富の分布間の関係と相互作用頻度の負のフィードバック機構。

これは分散と成長率が独立な一自由度のランダム乗算過程から得られる対数正規分布の結果と本質的に異なる。従って、この対数正規分布は多自由度系特有のものであると言える。また $w > 0$ の場合においてモンテカルロ・シミュレーションを行い確率分布関数 $\Psi(\xi)$ を調べた。その結果、十分時間が経つと確率分布関数の裾野から二粒子が飛び出して超成長を始める二人勝ち分布になることが分かった。また、ある時間 $t_c$ において一次モーメントの値が発散することから、確率分布関数のスケーリングが破れていることを示唆する結果を得た。

## 3 結論と考察

重み付き乗法的相互作用をする多自由度確率過程において粒子の持つ値の確率分布関数の裾野に $w < 0$ では対数正規分布が、$w > 0$ では二人勝ち分布が現れることが分かった。以上より、確率分布関数の裾野にベキ分布が現れるのは $w = 0$ の臨界点においてのみであることが分かった。このことはこのモデルが自己組織化臨界現象 [5] やスケールフリー・ネットワーク [6] と同様のカオスの縁 [7] の構造を持っていることを示している。従って、富のベキ分布も自己組織化臨界現象的な説明ができるのではないかと考えられる。だとしたら、経済系はどのようにして臨界点に自己組織化しているのだろうか？経済における富のやり取りの有名な性質として「マタイ効果」があ ある。これは「富める者はますます富み、貧しい者は富める者から奪われますます貧しくなる」という構造が経済系に内在していることを言っている。従って、図 1 にあるように富の分布はマタイ効果によりさらにゆらぎの大きい分布へと変化していくはずである。しかし、あまりにゆらぎが大きい（貧富の差が拡大する）とその状況を大多数の貧者が嫌って「逆風効果」を起こす（アメリカが世界に幅を効かせるようになると、それに反抗するテロ集団が現れることや、マイクロソフトが Windows を世界標準的な商用 OS にするとそれに対抗して Linux のような Open Source が

現れてくることといった例のように、系に一人勝ち的な要素が現れると必ずそれに対抗する勢力が自己組織的に現れてきて揺り戻しをはかろうとすることをここでは逆風効果と呼ぶ)。従って、富の分布は図1のようにマタイ効果と逆風効果の二つの負のフィードバック機構によって自己組織的に臨界状態をとっているのではないかと考えることができる。また実際の富の分布のベキ指数は多くの場合 $s=1$ になっていることが指摘されている [2]。しかし、乗法的相互作用をする多自由度確率過程のベキ指数は相互作用パラメータの詳細に依存してしまうために普遍性を持たない。しかし、重み付きモデルにおいて重みを $w=0$ 近傍にゆるい負のフィードバックをかけてコントロールすることで普遍的に $s=1$ のベキ分布が現れることが分かった(谷本の proceedings を参照)。この結果は $s=1$ のベキ分布の普遍性の理解に大きな影響を与えるものだと思われる。またこの結果は今のところ数値的な範囲のものだが、今後はなぜ $s=1$ のベキ分布が安定に存在するのかについて解析的に理由付けをすることを目指したいと考えている。

## 参考文献


[1] M. E. J. Newman, Contemporary Physics **46** (2005), 323; E. Limpert, W. A. Stahel, and M. Abbt, Bioscience **51**, (2001), 341.

[2] A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, Physica A **299** (2001) 213; Y. Fujiwara, H. Aoyama, C. Di Guilmi, W. Souma, and M. Gallegati, Physica A 335 (2004), 197; A. C. Silva and V. M. Yakovenko, Eur. Phys. Lett. **69** (2005), 304.

[3] D. ben-Avraham, E. Ben-Naim, K. Lindenberg, and A. Rosas, Phys. Rev. E **68** (2003), R050103.

[4] A. Fujihara, S. Tanimoto, T. Ohtsuki, and H. Yamamoto, submitted, e-print: cond-mat/0511625.

[5] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **38** (1988), 346; H. J. Jensen, Self-Organized Criticality, (Cambridge University Press, Cambridge, 1998); D. Sornette, Critical Phenomena in Natural Sciences, (Springer, Berlin, 2000).

[6] A. -L. Barabasi and R. Albert, Science **286** (1999), 509; R. Albert and A. -L. Barabasi, Rev. Mod. Phys. **74** (2002), 47.

[7] C. G. Langton, Physica D **42** (1990), 12; S. A. Kauffman, The Origin of Order, (Oxford Univ. Press, 1993).